九十九學年四技二專第二次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 99-2-C

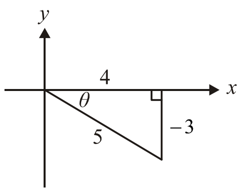
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	D	A	B	C	B	D	B	D	B	C	B	A	D	C	A	C	D	D	C	A	A	C	D

1. $\because A$ 在 $\overline{BC}$ 的垂直平分線上
$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}\Rightarrow\sqrt{(7+2)^2+(k-8)^2}$
$=\sqrt{(k+2)^2+(-1-8)^2}$
$81+(k-8)^2=(k+2)^2+81\Rightarrow k=3$

2. $\because f(x)$ 在 $x=1$ 處有最大值 3
故可設 $f(x)=a(x-1)^2+3$，又 $f(0)=1\Rightarrow a=-2$
得 $f(x)=-2(x-1)^2+3=-2x^2+4x+1$
$\Rightarrow a=-2$，$b=4$，$c=1$

3. $\because \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2$
$\Rightarrow\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$
$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$
又 $\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=\log_2\sin\theta\cos\theta=\log_2\dfrac{1}{8}=-3$

4. $\because \theta$ 為第四象限角
由右圖知
$\cot\theta+\csc\theta=(-\dfrac{4}{3})+(-\dfrac{5}{3})=-3$



5. $f(\theta)=-2\sin^2\theta-4\sin\theta+5=-2(\sin\theta+1)^2+7$
$\because 0\le\theta\le\dfrac{5\pi}{6}\Rightarrow 0\le\sin\theta\le 1$
$\therefore$當 $\sin\theta=0$ 時，有最大值 $f(\theta)=-2(0+1)^2+7=5$
當 $\sin\theta=1$時，有最小值 $f(\theta)=-2(1+1)^2+7=-1$
得最大值與最小值的和為 $5+(-1)=4$

6. $\because a=\sin 150^\circ=\sin 30^\circ$，$c=\tan 70^\circ=\cot 20^\circ$
又 $\cot 20^\circ>\cos 20^\circ>\cos 30^\circ$ 且 $\cos 30^\circ>\sin 30^\circ$
故 $c>b>a$

7. 設 $\overline{AB}$ 邊上的高為 h，$s=\dfrac{3+5+7}{2}=\dfrac{15}{2}$
三角形面積由海龍公式得
$\sqrt{\dfrac{15}{2}(\dfrac{15}{2}-3)(\dfrac{15}{2}-5)(\dfrac{15}{2}-7)}=\dfrac{1}{2}\times 3\times h$ (底×高÷2)
得 $h=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

8. (A) $f(\theta)$ 週期為 $\dfrac{\cos\theta\text{ 週期}}{2}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$
(B) $-1\le\cos 2\theta\le 1\Rightarrow -2\le 2\cos 2\theta\le 2$
$\Rightarrow -3\le 2\cos 2\theta-1\le 1$
(C) $f(2)=2\cos 4-1=2\cos 229.2^\circ-1<0$
(D) 由(B)得最小值為 -3
$2\cos 2\theta-1=-3\Rightarrow\cos 2\theta=-1$
即 $2\theta=\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時有最小值

9. $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-2)+3\times 1=-5$
$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$
$\therefore\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影為
$(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\dfrac{-5}{(\sqrt{5})^2})(-2,1)=(2,-1)$

10. $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos A$
又由餘弦定理知 $\cos A=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$
$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}$
$=\dfrac{(5\sqrt{2})^2+5^2-(5\sqrt{5})^2}{2}=-25$

11. 由柯西不等式知
$[(\dfrac{x}{3})^2+(\dfrac{y}{2})^2][(3)^2+(4)^2]\ge(x+2y)^2$
$(x+2y)^2\le 25\Rightarrow -5\le x+2y\le 5$
故最大值為 5

12. $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 2x+1=\sqrt{5}\Rightarrow x^2+x-1=0$
$x^4-3x^3-2x^2+9x-2$
$=(x^2+x-1)(x^2-4x+3)+(2x+1)$（商：$x^2-4x+3$；餘式：$2x+1$）
【利用分離係數法求商及餘數】
將 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 代入得 $x^4-3x^3-2x^2+9x-2$
$=(0)(x^2-4x+3)+(2\times\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+1)=\sqrt{5}$

13. 以 α^2 、 β^2 為根的新方程式為
$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$
又由題意得：$\alpha+\beta=3$，$\alpha\times\beta=-2$
【利用根與係數的關係】

所以$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times(-2)=13$

$\alpha^2\times\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-2)^2=4$

得新方程式為 $x^2-13x+4=0$

14. 同乘以 $(x-1)(x^2+2)$

$2x+1=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$

令 $x=1$ 得 $A=1$

比較 x^2 項係數 $\Rightarrow 0=1+B$，得 $B=-1$

比較常數項係數 $\Rightarrow 1=2-C$，得 $C=1$

故 $A+B+2C=1-1+2=2$

15. 複數相等，則實部＝實部，虛部＝虛部

即 $\begin{cases}2a-5=3\\a-2b=0\end{cases}\Rightarrow a=4$，$b=2$，故 $a\times b=4\times2=8$

16. $Z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$，所以 $Arg(Z)=\dfrac{5\pi}{3}$ 且 $\overline{Z}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$|Z|=\dfrac{|\sqrt{3}-i|}{|\sqrt{3}+i|}=\dfrac{2}{2}=1$

Z 之平方根 $Z_k=\cos\dfrac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2}$

$(k=0,1)$，即 $Z_0=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$Z_1=\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

17. 由極式乘除運算

$\dfrac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)(\cos6\theta+i\sin6\theta)}{\cos\theta-i\sin\theta}$

$=\dfrac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)(\cos6\theta+i\sin6\theta)}{\cos(-\theta)+\sin(-\theta)}$

$=\cos(3\theta+6\theta+\theta)+i\sin(3\theta+6\theta+\theta)$

$=\cos10\theta+i\sin10\theta$ 又 $\theta=\dfrac{\pi}{15}$，得 $\cos10\theta+i\sin10\theta$

$=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

18. $\because a^{2x}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^{-2x}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}=2+\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=3$

19. $9^x-4\cdot3^{x+1}+27=0\Rightarrow(3^x)^2-12\cdot3^x+27=0$

$(3^x-3)(3^x-9)=0$，$3^x=3$ 或 $3^x=9\Rightarrow x=1$ 或 $x=2$

故所有解的和為 $1+2=3$

20. $(\log_2 25+\log_4 5)(\log_{125}8+\log_5 32)$

$=(\log_2 5^2+\log_{2^2}5)(\log_{5^3}2^3+\log_5 2^5)$

$=(2\log_2 5+\dfrac{1}{2}\log_2 5)(\log_5 2+5\log_5 2)$

$=(\dfrac{5}{2}\log_2 5)(6\log_5 2)=\dfrac{5}{2}\times6=15$

21. 真數 $>0\Rightarrow x>0$ ……(1)

$\Rightarrow\log_4 x>0\Rightarrow x>1$ ……(2)

$0<\log_2(\log_4 x)<1\Rightarrow 1<\log_4 x<2$

$\Rightarrow 4^1<x<4^2\Rightarrow 4<x<16$ ……(3)

由(1) (2) (3)得解為 $4<x<16$

故整數解有 $16-4-1=11$

22. $\sum_{i=4}^{9}a_i=\sum_{i=1}^{9}a_i-\sum_{i=1}^{3}a_i=(9^2-23)-(3^2-23)$

$=9^2-3^2=72$【$\because\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-23$】

23. 原式可重新整理為

$(\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{3^2}+\dfrac{7}{3^3}+\cdots\cdots+\dfrac{7}{3^n}+\cdots\cdots)$

$-(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{5^n}+\cdots\cdots)$

$=\dfrac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{4}$

【利用無窮等比級數和公式 $\dfrac{a_1}{1-r}$】

24. 利用複數絕對值性質：

$|Z_1\times Z_2|=\dfrac{|3-4i|}{|2+i|^2}\times\dfrac{|4-2i|^2}{|1+2i|^2}=\dfrac{5}{(\sqrt{5})^2}\times\dfrac{(\sqrt{20})^2}{(\sqrt{5})^2}=4$

25. $\because$除以 $x+2$ 之餘式為 $6\Rightarrow f(-2)=6$【餘式定理】

$\Rightarrow 2\cdot(-2)^3+m(-2)^2-4(-2)+n=6$

$\Rightarrow 4m+n=14$ ……(1)

又 $x-1$ 為 $f(x)$ 之因式 $\Rightarrow f(1)=0$【因式定理】

$\Rightarrow 2\cdot1^3+m\cdot(1)^2-4\cdot(1)+n=0\Rightarrow m+n=2$ ……(2)

由(1) (2)式得 $m=4$，$n=-2$，故 $m-n=4-(-2)=6$