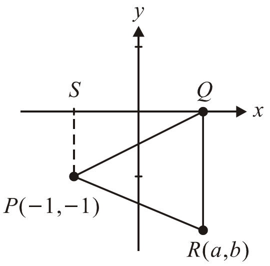
101 學年四技二專第一次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

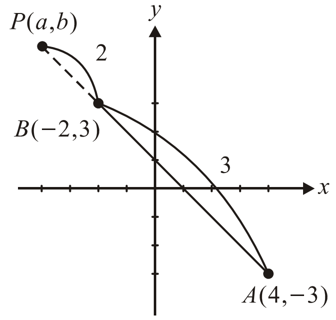
數學(C)卷 101-1-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	D	A	A	A	C	C	B	B	D	A	B	A	B	D	D	A	C	D	C	C	A	D	B

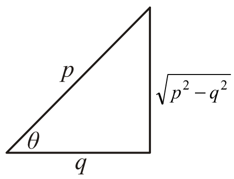
1. $a^5<0$ 且 $a+b>0 \Rightarrow a<0$ 、 $b>0$ 且 $|a|<|b|$
 則 $a^4-b^4<0$ ， $ab<0$ ， $\therefore Q(a^4-b^4\,,\,ab)\in$ Ⅲ
2. 將原式配方得 $f(x)=-(x-4)^2+3$
 當 $x=4$ 時，有極大值 3，則 $2p+q=11$
3. 如右圖所示
 在 ΔPSQ 中， $\angle S=90°$
 $\overline{PS}=1$ 、 $\overline{PQ}=2$ 、 $\overline{SQ}=\sqrt{3}$
 則 $Q(\sqrt{3}-1\,,\,0)$
 $\because \angle SQP=30°$ 、 $\angle PQR=60°$
 $\angle SQR=90°$ ， $\overline{QR}=2$
 $\therefore R(\sqrt{3}-1\,,\,-2)$
 $a=\sqrt{3}-1$ 、 $b=-2 \Rightarrow b-2a=-2\sqrt{3}$



4. 利用距離公式得知 $\overline{EF}=\sqrt{(-1-7)^2+[4-(-2)]^2}=10$
 $\because P$、Q 為 $\overline{DE}$ 及 $\overline{DF}$ 邊上之中點，$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\overline{EF}=5$
5. $M(\dfrac{5+(-2)}{2},\dfrac{6+8}{2})=M(\dfrac{3}{2},7)$
 $G(\dfrac{5+(-2)+0}{3},\dfrac{6+8+1}{3})=G(1\,,\,5)$
 $\therefore \overline{MG}=\sqrt{(1-\dfrac{3}{2})^2+(5-7)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$
6. $\because$平行四邊形之對角線互相平分
 $\therefore \overline{DF}$ 之中點 $=\overline{EG}$ 之中點
 $(\dfrac{3-4}{2},\dfrac{h+k}{2})=(\dfrac{3h-k}{2},\dfrac{2+7}{2})$
 $\begin{cases}-1=3h-k\cdots\cdots(1)\\ 9=h+k\cdots\cdots(2)\end{cases}$ ， $(1)+(2)\Rightarrow h=2$，$k=7$
 $\therefore 2h+3k=25$
7. 由下圖可知 B 點為 $\overline{AP}$ 之內分點
 $\because \overline{AP}=\dfrac{5}{2}\overline{PB}\Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=5:2\Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=3:2$ ；
 依內分點公式
 $\begin{cases}-2=\dfrac{3a+(2\times 4)}{5}\Rightarrow a=-6\\ 3=\dfrac{3y+2(-3)}{5}\Rightarrow b=7\end{cases}\Rightarrow b-a=13$



8. $\because L_1\perp L_2\Rightarrow m_1\cdot m_2=-1$
 $\therefore(-\dfrac{k_1}{4})[-(k_1+4)]=-1\Rightarrow k_1=-2$
 $L_1 // L_2\Rightarrow m_1=m_2$
 $\therefore(-\dfrac{k_2}{4})=[-(k_2+4)]\Rightarrow k_2=-\dfrac{16}{3}$ ， $k_1-k_2=\dfrac{10}{3}$
9. 設與 L 垂直之直線為 L'，其斜率為 $m_{L'}$
 $\because$兩直線垂直，則 $m_L\cdot m_{L'}=-1\Rightarrow(-\dfrac{1}{2})\cdot m_{L'}=-1$
 $m_{L'}=2$ ，由點斜式求直線方程式
 $y-1=2(x+3)\Rightarrow L':2x-y+7=0$
10. $\because \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$
 $\therefore$原式 $=\cot(80°-230°)=-\cot 150°=\sqrt{3}$
11. 如右圖所示， $\cos\theta=\dfrac{q}{p}$ 、$p>0$、$q>0$



 $\csc\theta+\cot\theta=\dfrac{p}{\sqrt{p^2-q^2}}+\dfrac{q}{\sqrt{p^2-q^2}}$
 $=\sqrt{\dfrac{(p+q)^2}{p^2-q^2}}=\sqrt{\dfrac{(p+q)^2}{(p-q)(p+q)}}=\sqrt{\dfrac{p+q}{p-q}}$
12. 化簡原式 $=\dfrac{\sin^2 x+(1-\cos x)^2}{(1-\cos x)\sin x}=\dfrac{2}{\sin x}=2\csc x$
 $\therefore$週期 $=2\pi$
13. $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\Rightarrow\alpha\in$ Ⅳ
 $\therefore\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ 、 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ 、 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$
 $90°<\beta<180°\Rightarrow\beta\in$ Ⅱ
 $\therefore\sin\beta=\dfrac{5}{13}$ 、 $\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ 、 $\tan\beta=-\dfrac{5}{12}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\dfrac{16}{65}$

$\Rightarrow\sec(\alpha+\beta)=-\dfrac{65}{16}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{63}{16}$

$\sec(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{8}$

14. 令 $a+b=11\,k$，$b+c=9\,k$，$c+a=12\,k$

$\Rightarrow a+b+c=16\,k$ ，$\therefore c=5\,k$、$b=4\,k$、$a=7\,k$

依餘弦定理：

$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(4\,k)^2+(5\,k)^2-(7\,k)^2}{2\cdot(4\,k)\cdot(5\,k)}=-\dfrac{1}{5}\\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{(7\,k)^2+(5\,k)^2-(4\,k)^2}{2\cdot(7\,k)\cdot(5\,k)}=\dfrac{29}{35}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(7\,k)^2+(4\,k)^2-(5\,k)^2}{2\cdot(7\,k)\cdot(4\,k)}=\dfrac{5}{7}\end{cases}$$

$\Rightarrow\cos A$ ： $\cos B$ ： $\cos C=-\dfrac{1}{5}$ ： $\dfrac{29}{35}$ ： $\dfrac{5}{7}$

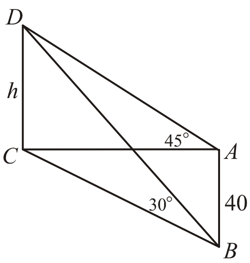
$=-7$ ：29：25

15. 繪簡圖如右：令塔高為 $\overline{CD}=h$

ΔACD 、 ΔBCD 及 ΔBAC

為直角三角形

則 $\begin{cases}\tan 45^\circ=\dfrac{h}{\overline{AC}}\Rightarrow\overline{AC}=h\\ \tan 30^\circ=\dfrac{h}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{3}h\end{cases}$



依畢氏定理：

$\overline{AC}^2+40^2=\overline{BC}^2\Rightarrow h=20\sqrt{2}$

16. 已知 $\angle C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ$

令 ΔABC 面積為 Δ ，則 $\begin{cases}\Delta=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin A\cdots\cdots(1)\\ \Delta=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B\cdots\cdots(2)\\ \Delta=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin A\cdots\cdots(3)\end{cases}$

$(1)\cdot(2)\cdot(3)$ 相乘

則得 $\Delta^3=\dfrac{1}{8}(abc)^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\cdots\cdots(4)$

又外接圓公式為 $\Delta=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow abc=4\Delta R$ 代入(4)得

$\Delta=2R^2\sin 75^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ$

$=2\cdot(12)^2\cdot\dfrac{6+2\sqrt{3}}{16}=36(3+\sqrt{3})$

17. 由三角恆等式之平方關係

$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 代入原式

$f(x)=3(1-\cos^2 x)-6\cos x+5$

$=3-3\cos^2 x-6\cos x+5$

配方 $f(x)=-3(\cos x+1)^2+11$

由三角函數值域 $-1\le\cos x\le 1$ 得 $M=11$

$m=-1\Rightarrow M+m=10$

18. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影長為 $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\sqrt{2}$

19. $\because\vec{p}=\vec{q}$ ，$\therefore 4s-3=5\Rightarrow s=2$

$6=2t+4\Rightarrow t=1$ ， $s+t=3$

20. 已知 $2\vec{p}+3\vec{q}=(4-6\,,-6+3)=(-2\,,-3)$

則 $|2\vec{p}+3\vec{q}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

21. $\because\vec{r}=x\vec{p}+y\vec{q}\Rightarrow(12\,,5)=x(-2\,,1)+y(3\,,4)$

$\therefore\begin{cases}-2x+3y=12\\ x+4y=5\end{cases}\Rightarrow x=-3$ ， $y=2$ ， $2y-x=7$

22. 先求兩向量的內積

$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 60^\circ=2\times 3\times\dfrac{1}{2}=3$

再將原式平方求出

$|2\vec{p}-3\vec{q}|^2=4|\vec{p}|^2-12\cdot(\vec{p}\cdot\vec{q})+9|\vec{q}|^2$

$=16-36+81=61$

則 $|2\vec{p}-3\vec{q}|=\sqrt{61}$

23. $\because\vec{x}\cdot\vec{y}=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$

24. 以聯立方式，求出 L_1 與 L_2 之交點 P

$\begin{cases}2x+y=-6\\ x-y=-3\end{cases}\Rightarrow x=-3$ ， $y=0$ ，$\therefore P(-3\,,0)$

$d(P\,,L_3)=\dfrac{|-9+0+5|}{\sqrt{(3)^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$

25. 將 P、Q 兩點代入直線 L 知兩點為異側，可由三角形比例關係得 $\overline{PM}$ ：$\overline{QM}=d(P\,,L)$：$d(Q\,,L)$

$=\dfrac{|2-12+4|}{\sqrt{17}}:\dfrac{|5+16+4|}{\sqrt{17}}=6$ ：25