100 學年四技二專第三次聯合模擬考試
共同考科　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 100-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	C	C	A	D	C	B	D	B	A	A	C	D	A	B	B	B	D	D	B	A	C	B	D

1. ΔABC 的重心 G 坐標爲 $(\frac{-1+2+5}{3},\frac{3-1+4}{3})=(2,2)$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$

2. $\overline{AB}$ 的中點爲 $(\frac{-1+2}{2},\frac{3-1}{2})=(\frac{1}{2},1)$

$m_{\overline{AB}}=\frac{3-(-1)}{-1-2}=-\frac{4}{3}\Rightarrow$ 垂直平分線斜率 $m=\frac{3}{4}$

$\therefore \overline{AB}$ 的垂直平分線方程式爲

$y-1=\frac{3}{4}(x-\frac{1}{2})\Rightarrow 6x-8y+5=0$

3. 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夾角爲 θ，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$

$\Rightarrow|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$\Rightarrow|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2=13$

$\Rightarrow 4^2+2\times4\times3\cos\theta+3^2=13\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120°$

4. $a=(\frac{1}{27})^{-2}=(3^{-3})^{-2}=3^6$，$b=3^{\frac{-1}{4}}$

$c=27^{\frac{-1}{3}}=(3^3)^{\frac{-1}{3}}=3^{-1}$，$d=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=(3^{-1})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{-1}{2}}$

$\because 6>-\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}>-1$　$\therefore 3^6>3^{\frac{-1}{4}}>3^{\frac{-1}{2}}>3^{-1}$

即 $a>b>d>c$

5. 解爲 $-1<x<3$ 的不等式爲 $(x+1)(x-3)<0$

$\Rightarrow x^2-2x-3<0$，令 $a=1$、$b=-2$、$c=-3$

$\therefore bx^2+ax-c<0\Rightarrow -2x^2+x+3<0$

$\Rightarrow 2x^2-x-3>0\Rightarrow(2x-3)(x+1)>0$

$\Rightarrow x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-1$

6. $\because \Delta ABD$ 和 ΔBCD 的外接圓相同

$\therefore$由正弦定理 $\frac{6}{\sin30°}=2R=\frac{\overline{CD}}{\sin60°}$

$\Rightarrow\overline{CD}=\frac{6\sin60°}{\sin30°}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

7. (A) $\sin870°=\sin(180°\times5-30°)=\sin30°=\frac{1}{2}$

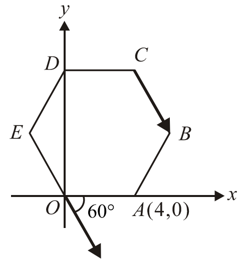
(B) $\tan1310°=\tan(180°\times7+50°)$
$=\tan50°>\tan45°=1$

(C) $\cos(-1900°)=\cos1900°=\cos(180°\times11-80°)$
$=-\cos80°<0$

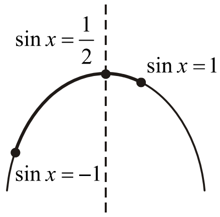
(D) $\cos430°=\cos(360°+70°)=\cos70°<\cos60°=\frac{1}{2}$

且 $\cos70°>0$　$\therefore$(C) 最小

8. 如右圖，$\overrightarrow{CB}$的方向角爲
$360°-60°=300°$
又 $|\overrightarrow{CB}|=4$ ($\because \overline{OA}=4$)
$\therefore \overrightarrow{CB}=(|\overrightarrow{CB}|\cos300°,|\overrightarrow{CB}|\sin300°)$
$=(4\times\frac{1}{2},4\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=(2,-2\sqrt{3})$



9. $f(x)=\cos2x+2\sin x$
$=(1-2\sin^2x)+2\sin x$
$=-2\sin^2x+2\sin x+1$
$=-2[\sin^2x-\sin x+(\frac{1}{2})^2]+\frac{1}{2}+1$
$=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$

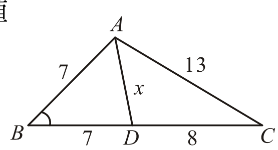


$\therefore$當 $\sin x=\frac{1}{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 $M=\frac{3}{2}$

當 $\sin x=-1$ 時，$f(x)$ 有最小值

$m=-2\times(-1)^2+2\times(-1)+1=-3$

10. 如右圖，設 $\overline{AD}=x$
由餘弦定理
ΔABD 中的 $\cos B=\Delta ABC$ 中的 $\cos B$



$\Rightarrow\frac{7^2+7^2-x^2}{2\times7\times7}=\frac{7^2+(7+8)^2-13^2}{2\times7\times(7+8)}$

$\Rightarrow\frac{98-x^2}{7}=\frac{105}{15}=7\Rightarrow x=\pm7$ (-7 不合)

11. 設 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\Rightarrow\begin{cases}f(1)=3\\f(-1)=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\-a+b=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$

故所求餘式爲 $5x-2$

12. (1) $x-1>0\Rightarrow x>1$

(2) $x+1>0\Rightarrow x>-1$

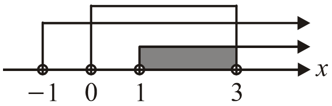
(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(x+1)$

$\Rightarrow\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(x+1)\Rightarrow(x-1)^2<x+1$

$\Rightarrow x^2-3x<0\Rightarrow x(x-3)<0$

$\Rightarrow 0<x<3$

由(1)、(2)、(3)可得
如右圖
故$1<x<3$



13. $x=\log\dfrac{27^{200}}{5^{100}}=\log 27^{200}-\log 5^{100}$

$=200\times\log 3^3-100\times(1-\log 2)$

$=600\times 0.4771-100\times 0.6990=216.36=216+0.36$

$\Rightarrow x$ 的首數爲 216

$\therefore x$ 的整數部分爲 $216+1=217$ 位數

14. 設首項爲 a，公差爲 d

(A)、(B) $\begin{cases}a_3=a+2d=44\\a_{13}=a+12d=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=50\\d=-3\end{cases}$

$\therefore$首項爲 50，公差爲 -3

(C) $a_n=a+(n-1)d<0\Rightarrow 50+(n-1)\times(-3)<0$

$\Rightarrow n>\dfrac{53}{3}=17\dfrac{2}{3}$　$\therefore$自第 18 項起爲負

(D) $\because$第 18 項開始等差數列爲負

$\therefore$前 17 項之和爲 S_n 之最大值

$\Rightarrow S_{17}=\dfrac{17}{2}[2\times 50+(17-1)\times(-3)]=442$

15. 設首項爲 a，公比爲 $r\Rightarrow\begin{cases}S=\dfrac{a}{1-r}=3\cdots\cdots ①\\a_2=ar=-\dfrac{4}{3}\cdots\cdots ②\end{cases}$

$\dfrac{①}{②}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{1-r}}{ar}=\dfrac{3}{-\frac{4}{3}}\Rightarrow\dfrac{1}{(1-r)r}=-\dfrac{9}{4}\Rightarrow 9r^2-9r-4=0$

$\Rightarrow(3r-4)(3r+1)=0\Rightarrow r=\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{1}{3}$

($\because |r|<1$　$\therefore\dfrac{4}{3}$ 不合)

故 $r=-\dfrac{1}{3}$ 代入②，$a\times(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow a=4$

16. $1+z+z^2+\cdots+z^{17}=\dfrac{1\times(1-z^{18})}{1-z}=\dfrac{1-(1-i)^{18}}{1-(1-i)}$

$=\dfrac{1-[(1-i)^2]^9}{i}=\dfrac{1-(-2i)^9}{i}=\dfrac{1+512i^9}{i}=\dfrac{1+512i}{i}$

$=\dfrac{1}{i}+512=512-i$　$\therefore a=512$、$b=-1$，$a+b=511$

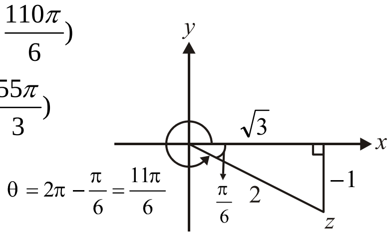
17. $z^{10}=(\sqrt{3}-i)^{10}=[2(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6})]^{10}$

$=2^{10}(\cos\dfrac{110\pi}{6}+i\sin\dfrac{110\pi}{6})$

$=2^{10}(\cos\dfrac{55\pi}{3}+i\sin\dfrac{55\pi}{3})$

$\because\dfrac{55\pi}{3}=18\pi+\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore Arg(z^{10})=\dfrac{\pi}{3}$



18. L_1 的斜率 $m_1=\dfrac{2}{3}$，L_2 的斜率 $m_2=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\tan\theta=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\dfrac{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})}{1+\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})}=\pm\dfrac{7}{4}$

19. 不等式組的圖解如下：

$\begin{cases}x+2y=15\\x+5y=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$

$\begin{cases}x+2y=15\\3x+y=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=3\end{cases}$

$f(0,0)=0$

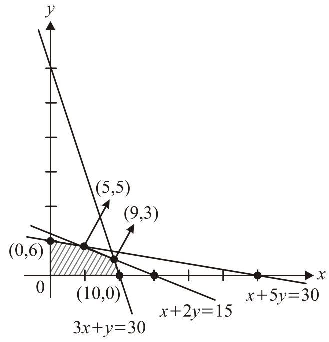
$f(0,6)=0+4\times 6=24$

$f(5,5)=5+4\times 5=25$ (最大)

$f(9,3)=9+4\times 3=21$

$f(10,0)=10$

$\therefore f(x,y)$ 的最大值爲 25



20. (A) 圓 C：$(x^2-6x+3^2)+y^2=16+9$

$\Rightarrow(x-3)^2+y^2=25$　$\therefore$圓心 $(3,0)$，半徑 $r=5$

(B) 圓心和 $3x-4y+15=0$ 的距離

$=\dfrac{|3\times 3-4\times 0+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{24}{5}<5=r$

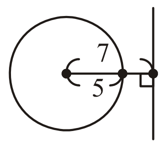
$\therefore$圓 C 和 $3x-4y+15=0$ 有 2 個交點

(C) 過圓 C 上點 $(0,4)$ 之切線爲

$0\times x+4\times y-6\times\dfrac{0+x}{2}-16=0\Rightarrow 3x-4y+16=0$

(D) 圓心和直線 $3x-4y+26=0$ 的距離

$d=\dfrac{|3\times 3-4\times 0+26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{35}{5}=7$



$\therefore$圓 C 上之點和直線的最短距離

$=d-r=7-5=2$

21. 如右圖

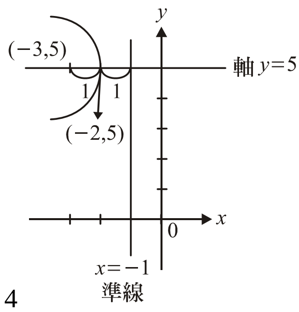
(A) 開口向左

(B) 對稱軸爲 $y=5$

(C) 準線爲 $x=-1$

(D) 焦距 $=1$

$\therefore$正焦弦長 $=4$



22. 橢圓 Γ：$\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

$\Rightarrow a=5$、$b=3$、$c=\sqrt{25-9}=4$

中心 $(-1,3)$，長軸橫向的橢圓

$\Rightarrow$ 長軸頂點爲 $(-1\pm 5,3)=(4,3)$、$(-6,3)$ 爲雙曲線 Γ' 的焦點，焦點爲 $(-1\pm 4,3)=(3,3)$、$(-5,3)$ 爲雙曲線 Γ' 的頂點

$\Rightarrow$ 雙曲線中心 $(-1,3)$、$c=5$、$a=4$、$b=\sqrt{25-16}=3$，貫軸橫向

$\therefore$雙曲線 Γ' ： $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

令 $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=0$

$\Rightarrow 9(x+1)^2-16(y-3)^2=0$

$\Rightarrow [3(x+1)+4(y-3)][3(x+1)-4(y-3)]=0$

$\Rightarrow (3x+4y-9)(3x-4y+15)=0$

$\therefore$斜率爲正的漸近線爲 $3x-4y+15=0$

23. 設 $\overline{AB}=x$ ， ΔOAB 中， $\dfrac{x}{\overline{OB}}=\sin 15^\circ \Rightarrow \overline{OB}=\dfrac{x}{\sin 15^\circ}$

ΔOBC 中， $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\cos 15^\circ$

$\Rightarrow \overline{OC}=\dfrac{\overline{OB}}{\cos 15^\circ}=\dfrac{\frac{x}{\sin 15^\circ}}{\cos 15^\circ}=\dfrac{x}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

ΔOCD 中， $\dfrac{\overline{OC}}{12}=\cos 30^\circ \Rightarrow \dfrac{\frac{x}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}}{12}=\cos 30^\circ$

$\Rightarrow x=12\sin 15^\circ \cos 15^\circ \cos 30^\circ$

$=6\times(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)\cos 30^\circ$

$=6\times \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ = 6\times \dfrac{1}{2}\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

24. 令 $x=1+2i \Rightarrow x-1=2i \Rightarrow (x-1)^2=(2i)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1=-4 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

$\therefore$以 $1+2i$ 爲一根之二次方程式爲 $x^2-2x+5=0$

又 x^3-4x^2+ax+b 可被 x^2-2x+5 整除

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & & \\
1-2+5 & 1 & -4 & +\ a & +\ b \\
 & 1 & -2 & +\ 5 & \\ \hline
 & & -2 & +\ (a-5) & +\ b \\
 & & -2 & +\ 4 & -10 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a-5=4 \Rightarrow a=9 \\ b=-10 \end{cases}$ $\quad \therefore a+b=9+(-10)=-1$

25. 設 L： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ($a>0$ 、 $b>0$)

$(3,4)$ 代入 $\Rightarrow \dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1$

L 和兩坐標軸所圍三角形面積 $=\dfrac{ab}{2}$

由算幾不等式 $\Rightarrow \dfrac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\ge \sqrt{\dfrac{3}{a}\times\dfrac{4}{b}} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ge\sqrt{\dfrac{12}{ab}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}\ge\dfrac{12}{ab}\Rightarrow ab\ge 48 \Rightarrow \dfrac{ab}{2}\ge 24$

$\therefore$面積最小値 $p=24$